Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ____________
Carné: ____________
Sección: ____________

Matemáticas II (MA-1112)
Enero-Marzo 2008
Segundo Examen Parcial (35%)
Tipo D

Soluciones

(1) **(6 puntos) Halle el (los) valor(es) de $x \in (-1,1)$ que satisface(n) la siguiente expresión:**

$2\ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+1) - \ln(1-x)^2 = 0$

Solución:

$$
\begin{aligned}
&2\ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+1) - \ln(1-x)^2 = 0\\
&\ln(x^2+1) - \ln[(x+1)(1-x)^2] = 0\\
&\ln\left(\frac{x^2+1}{(x-1)(1-x)^2}\right) = 0\\
&\text{(tomando exponenciales a ambos lados obtenemos)}\\
&\frac{x^2+1}{(x-1)(1-x)^2} = 1\\
&x^2+1 = (x+1)(1-x)^2\\
&\text{(resolviendo y factorizando)}\\
&x(x^2-2x-1) = 0
\end{aligned}
$$

Ahora, resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos $x_1 = 0$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = 1-\sqrt{2}$.
Como $x_2 = 1+\sqrt{2} \notin (-1,1)$, la descartamos.

(2) **(4 puntos c/u) Calcule**

(a) $\int_0^{\pi/2} \mathbf{sen}(2x)e^{-\mathbf{sen}^2(x)}dx$

Solución:

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}(2x)e^{-\text{sen}^2(x)}dx = 2\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)\cos(x)e^{-\text{sen}^2(x)}dx$$

$$\begin{aligned}
&\text{(haciendo el cambio } u = \text{sen}^2(x) \text{ con } du = 2\text{sen (x)}\cos(x)dx\text{)}\\
&= \int_0^1 e^{-u}du\\
&= -e^{-u}\Big|_{u=0}^{u=1}\\
&= 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$

(b) $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+\frac{3}{2}x^2+3x}dx$
Solución:

Haciendo el cambio de variable $u = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x$ con $du = 3(x^2 + x + 1)dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+1}{x^3+\frac{3}{2}x^2+3x}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}\\
&= \frac{1}{3}\ln|u| + C\\
&= \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\right| + C.
\end{aligned}$$

(c) $\int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$ **Solución:**

Haciendo el cambio de variable $u = e^x$ con $du = e^x dx$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx &= \int_1^3 \frac{du}{\sqrt{9-u^2}}\\
&= \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{3}\right)^2}}\\
&\text{(haciendo el cambio } v = \frac{u}{3} \text{ con } dv = \frac{1}{3}du\text{)}\\
&= \int_{1/3}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}\\
&= \text{arcsen}(v)\Big|_{v=1/3}^{v=1}\\
&= \frac{\pi}{2} - \text{arcsen}(1/3)
\end{aligned}$$

(d) $D_x\left[(x-e^x)^{x^3}\right]$
Solución:

$$\begin{aligned}
D_x\left[(x-e^x)^{x^3}\right] &= D_x\left[e^{x^3\ln(x-e^x)}\right] \\
&= (x^3\ln(x-e^x))' e^{x^3\ln(x-e^x)} \\
&= \left[3x^2\ln(x-e^x) + \frac{x^3(1-e^x)}{x-e^x}\right](x-e^x)^{x^3}.
\end{aligned}$$

(3) (a) (3 puntos) Usando que sech$^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ para $0 < x \le 1$, calcule (sech$^{-1}(x))'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sech}^{-1}(x))' &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' \\
&= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}x-(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2} \\
&\text{(simplificando obtenemos)} \\
&= \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

siempre que $x \in (0,1)$.

(b) **(3 puntos) Solución:**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(3x)dx}{\cos(3x)\sqrt{1-\cos^2(3x)}} &= \frac{-1}{3}\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{1}{3}\operatorname{sech}^{-1}(u) + C \\
&= \frac{1}{3}\operatorname{sech}^{-1}(\cos(3x)) + C.
\end{aligned}$$

(4) **(7 puntos)** La región plana acotada por la curva $y = x(4-x)$ y el eje x se hace girar alrededor del eje y. Halle el volumen del sólido de revolución resultante.
Solución:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^4 xx(4-x)dx \\
&= \frac{128\pi}{3}
\end{aligned}$$